Фізика

МЕХАНІКА

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА Й ТЕРМОДИНАМІКА

Навчальний посібник

Видання 2-е стереотипне

За загальною редакцією професора
А. П. Поліщука

Київ 2017

УДК 531(075.8)
ББК В 30я 7
Ф 503

Автори: *А. Г. Бовтрук, Ю. Т. Герасименко, О.В. Грідякіна*
Б. Ф. Лахін, С. М. Мєняйлов, А. П. Поліщук

Рецензенти: *О. В. Ковальчук* – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київський національний університет технологій та дизайну);
С. П. Кручинін – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Інститут теоретичної фізики НАН України);
В. І. Оглобля – канд. фіз.-мат. наук, доц. (Національний університет імені Т. Г. Шевченка)

Рекомендовано вченою радою Національного авіаційного університету (протокол № 8 від 10.06.2015 р.).

Ф 503 **Фізика.** Механіка. Молекулярна фізика й термодинаміка: навч. посіб. / А. Г. Бовтрук, Ю. Т. Герасименко, О. В Грідякіна [та ін.]; за заг. ред. проф. А. П. Поліщука. – К. : НАУ, 2017. – 416 с.

ISBN 978–966–598–844–1

Пропонований посібник є одним з найперших видань нового типу, підготовка яких стала необхідною у зв'язку з приєднанням України до Болонського процесу та переходом до кредитно-модульної системи навчання. Він відкриває започатковану та апробовану на кафедрі загальної фізики НАУ серію «Модульне навчання. Фізика», що складається із семи модулів.

У модулі 1 «Механіка» систематизовано програмний матеріал з основ класичної механіки та спеціальної теорії відносності. Навчальні елементи цього модуля містять теоретичне ядро, задачі для аудиторної та індивідуальної роботи, а також лабораторний практикум. Питання для самоперевірки й ключові слова допоможуть студентові в підготовці до рейтингового контролю.

У модулі 2 «Молекулярна фізика й термодинаміка» систематизовано подано програмний матеріал з основних положень і законів молекулярно-кінетичної теорії та термодинаміки. Навчальні елементи цього модуля містять теоретичне ядро, задачі для аудиторної та індивідуальної роботи, а також лабораторний практикум. Питання для самоперевірки й ключові слова допоможуть студентові в підготовці до рейтингового контролю.

Для студентів усіх спеціальностей та всіх форм навчання вищих технічних навчальних закладів.

УДК 531 (075.8)
ББК В 30я7

ISBN 978–966–598–844–1

ВСТУП

Дисципліна «Фізика» вивчається протягом трьох (двох) семестрів і складається з кількох модулів.

Мета даної дисципліни — вивчення студентами основних фізичних явищ і законів, оволодіння фундаментальних понять і теорій класичної та сучасної фізики, а також методів сучасного дослідження і зрештою формування в них наукового світогляду, сучасного фізичного мислення.

Поставлена мета передбачає такі завдання:

• засвоєння об'єктивних закономірностей навколишнього світу, зв'язків між фізичними явищами;

• опанування способів і методів розв'язування конкретних задач із різних розділів фізики;

• ознайомлення з експериментальною фізичною апаратурою, формування навичок виконання фізичного експерименту;

• формування уміння виокремлювати конкретний фізичний зміст у прикладних задачах майбутньої спеціальності.

У результаті вивчення дисципліни «Фізика» студенти мають *знати*:

— основні фізичні явища, закони й теорії класичної і сучасної фізики та сфери їх практичного застосування в техніці;

— найважливіші методи фізичних досліджень;

— систему одиниць фізичних величин СІ;

студенти мають набути *вмінь*:

— застосовувати фізичні закони для розв'язування практичних задач;

— використовувати фізичні закони й засоби досліджень під час вивчення загальноінженерних, технічних і спеціальних дисциплін;

— виконувати фізичні вимірювання та оцінювати відповідні похибки.

Дисципліна «Фізика» є фундаментом, на якому ґрунтується вивчення всіх інших спеціальних дисциплін у вищих технічних навчальних закладах. У курсі фізики особлива увага приділяється поясненню фізичної суті явищ, ознайомленню з поняттями, моделями й законами для того, щоб надалі завдяки здобутим знанням можна було розв'язувати різноманітні прикладні задачі.

Курс фізики разом із курсом вищої математики становить підґрунтя теоретичної підготовки інженерів і відіграє роль фундаментальної фізико-математичної бази, без якої неможлива успішна діяльність інженерів будь-якого профілю.

Модуль 1. МЕХАНІКА

За допомогою модуля «Механіка» студенти мають оволодіти фундаментальними знаннями засад класичної механіки, а також ознайомитися з основними положеннями спеціальної теорії відносності (СТВ).

Механіка — розділ фізики, в якому вивчається найпростіша форма руху матерії — механічний рух, тобто зміна положення одних тіл чи частин тіла відносно інших.

Слово «механіка» в перекладі з грецької означає мистецтво створювати машини. Авторами перших трактатів з механіки були Арістотель (IV ст. до н.е.) та Архімед (III ст. до н.е.). Подальшого розвитку ця наука набула у працях Леонардо да Вінчі, Галілео Галілея та інших славетних учених. Завершилось створення основ механіки твором І. Ньютона «Математичні початки натуральної філософії» (1687).

З подальшим розвитком фізики з'ясувалось, що залежно від швидкості руху й масштабів тіл підходи до вивчення механічних закономірностей можуть бути зовсім різними. Тому на сучасному етапі розрізняють три напрямки механіки: класичну механіку (або механіку Ньютона), релятивістську механіку (або теорію відносності Ейнштейна) та квантову механіку. Усі вони вивчають механічний рух тіл, але мають певні межі застосування. Рух макроскопічних тіл зі швидкостями, невеликими порівняно зі швидкістю світла, вивчає *класична механіка*; рух тіл, швидкості яких наближені до швидкості світла, розглядає *релятивістська механіка*; вивченню руху мікрочастинок присвячено *квантову механіку*.

У цьому випуску розглядаються питання класичної та релятивістської механіки. Для опису механічних явищ і встановлення законів механіки зручно користуватись ідеалізованими моделями реальних тіл: матеріальною точкою й абсолютно твердим тілом.

Матеріальною точкою (МТ) називають тіло, геометричними розмірами якого в умовах конкретної задачі можна знехтувати.

Абсолютно твердим тілом (АТТ) називають тіло, в якого відстань між будь-якими двома точками ніколи не змінюється. Іншими словами, це тіло, деформацією якого можна знехтувати.

У результаті вивчення матеріалу модуля студенти мають *знати* основні кінематичні і динамічні характеристики та закони руху, визначення таких понять, як робота, потужність, кінетична і потенціальна енергія, закони збереження, постулати СТВ, перетворення координат Лоренца та їх наслідки, взаємозв’язок маси й енергії; *уміти* розв’язувати прямі та обернені задачі кінематики і динаміки, користуватися інерціальними та неінерціальними системами відліку, використовувати методи експериментальних досліджень механічних величин, будувати графіки, визначати похибки фізичних вимірювань. Студенти мають *розуміти* межі й особливості застосування класичної механіки та СТВ, взаємозв’язки і взаємозалежності між механічними величинами.

Потрібно звернути увагу на те, що викладання ведеться з використанням диференціального та інтегрального числення, але на доступному для студента-першокурсника рівні

Навчальний елемент 0
СТИСЛІ МАТЕМАТИЧНІ ВІДОМОСТІ

0.1. Вектори

Скалярна величина (скаляр) характеризується числовим значенням та додатним або від’ємним знаком (маса, температура, робота тощо). Дії зі скалярами виконуються алгебрично. Середнє арифметичне n скалярних величин a_1, a_2, ..., a_n позначають $\langle a \rangle$.

Векторна величина (вектор) характеризується числовим значенням і напрямом у просторі (сила, швидкість, прискорення, напруженість електричного і магнітного поля тощо). Графічно вектор зображають стрілкою, що починається в точці його визначення і має певну довжину в заданому масштабі. Довжину вектора називають *модулем* або *абсолютною величиною*. Модуль вектора — завжди додатна скалярна величина.

Вектор позначають курсивом зі стрілкою над ним $\vec{a}$. Модуль вектора позначають курсивним шрифтом a або символом $|\bar{a}|$. Якщо під час розв’язання задач у скалярному вигляді з’являється, наприклад, значення $-a$, то це означає, що $a < 0$, а вектор цієї величини напрямлений у протилежний бік до вибраного напряму.

Колінеарними називають вектори, які напрямлені вздовж паралельних прямих; вектори, що лежать у паралельних площинах, називають *компланарними.* Колінеарні вектори, що мають однаковий напрям і однакові модулі, дорівнюють один одному.

Взаємно протилежні вектори $\vec{a}$ і $-\vec{a}$ — рівні за модулем і протилежно напрямлені.

Радіус-вектор — це вектор, що починається в точці 0 початку координат і закінчується в точці M з координатами x, y, z. Радіус-вектор однозначно визначає положення точки M у просторі (рис. 0.1).

Одиничний вектор — вектор, що вказує певний напрям у просторі, модуль якого дорівнює одиниці. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, позначають $\vec{e}_a$ і називають *ортом* цього напряму. Вектор $\vec{a}$ можна записати так: $\vec{a} = \frac{\vec{a}}{a} \cdot a = a\vec{e}_a$, де a — модуль; $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{a}$ — орт вектора $\vec{a}$. Модуль орта:

$$\left|\vec{e}_a\right| = \frac{a}{a} = 1.$$

Орти в декартовій системі координат (OX, OY, OZ) позначають через $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ або $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Радіус-вектор точки $M(x,y,z)$ можна подати через координати й орти:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

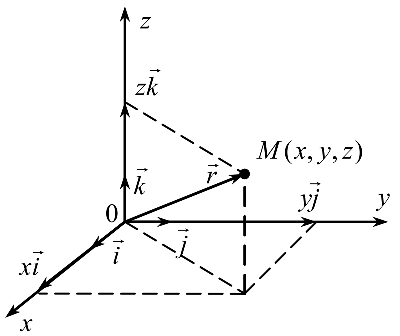

Рис. 0.1

Додавання векторів ($\vec{a} + \vec{b}$) — знаходження суми двох векторів за правилом паралелограма або трикутника (рис. 0.2):

• за правилом паралелограма (рис. 0.2, *а*): сумарний вектор $\vec{c}$ — діагональ паралелограма, побудованого на його складових, що виходять зі спільного початку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

• за правилом трикутника (рис. 0.2, *б*): з кінця вектора $\vec{a}$ відкладається вектор $\vec{b}$; замикальний вектор $\vec{c}$ є векторною сумою.

Якщо додаються *n* векторів, то сумарний вектор дорівнює геометричній сумі всіх векторів.

Різницею двох векторів ($\vec{c}-\vec{b}$) є вектор $\vec{a}$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{c}$ (див. рис. 0.2, *б*).

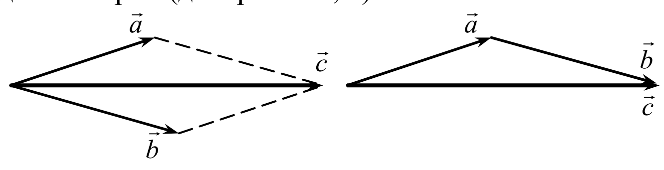

Рис. 0.2

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}\vec{b}$, або $(\vec{a}, \vec{b})$, або $(\vec{a}\vec{b})$ дорівнює добутку їхніх модулів на косинус кута між ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = ab\cos\alpha .$$

Скалярний добуток векторів — скаляр, що не залежить від порядку співмножників: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

Скалярний добуток взаємно перпендикулярних векторів ($\alpha = \pi/2$) дорівнює нулю. Квадрат вектора — скалярний добуток вектора на самого себе $(\alpha = 0)$:

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = aa\cos\alpha = a^2 = |\vec{a}|^2 .$$

Зокрема, *квадрат будь-якого орта* дорівнюватиме одиниці, а скалярний добуток *ортогональних ортів* — нулю.

Проекція вектора на вісь координат (або на інший вектор) дорівнює добутку модуля цього вектора на косинус кута між вектором та додатним напрямом осі координат *X* (або іншого вектора): $a_x=|\vec{a}|\cos\alpha$. Проекція вектора на вісь координат може бути додатною або від'ємною залежно від величини кута α.

Скалярний добуток можна записати кількома способами:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = ab\cos\alpha = (a\cos\alpha)b = a(b\cos\alpha),$$

де $a_b = a\cos\alpha$ — проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$. Аналогічно $b_a = b\cos\alpha$ — проекція вектора $\vec{b}$ на напрям вектора $\vec{a}$. Тому $(\vec{a}, \vec{b}) = ab_a = a_b b$, тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку модуля першого вектора на проекцію другого вектора за напрямом першого і навпаки.

У декартовій системі координат вектори можна подати через їхні проекції: $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$; $\vec{b} = b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z$.

Сума цих векторів:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{e}_x(a_x + b_x) + \vec{e}_y(a_y + b_y) + \vec{e}_z(a_z + b_z).$$

Отже, проекції вектора суми двох векторів дорівнюють сумі відповідних проекцій складових:

$$c_x = a_x + b_x,\ c_y = a_y + b_y,\ c_z = a_z + b_z.$$

Квадрат будь-якого орта дорівнює одиниці, а скалярний добуток *ортогональних* (взаємно перпендикулярних) ортів дорівнює нулю, тому скалярний добуток векторів, записаний через їхні проекції в *прямокутній декартовій системі координат*, матиме вигляд:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Добуток вектора $\vec{a}$ на число (скаляр) k є вектор, модуль якого в $|k|$ разів більший від модуля вектора $\vec{a}$, а напрям його збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $k > 0$, і протилежний до напряму вектора $\vec{a}$, якщо $k < 0$.

Векторний добуток двох векторів $\vec{a}\times\vec{b}$, або $[\vec{a}, \vec{b}]$, або $[\vec{a}\vec{b}]$ — вектор $\vec{c}$, який чисельно дорівнює добутку модулів цих векторів на синус кута між ними ($c = ab\sin\alpha$) і напрямлений *перпендикулярно* до площини, в якій містяться ці вектори. Напрям визначається за правилом *правого гвинта*: вектор $\vec{c}$ напрямлений у бік поступального руху гвинта при повороті його від першого співмножника $\vec{a}$ до другого $\vec{b}$ за найменшим кутом α (рис. 0.3). З рисунка видно, що модуль векторного добутку чисельно дорівнює *площі паралелограма* $S = ab\sin\alpha$.

З означення векторного добутку випливає, що $[\vec{a},\ \vec{a}] = 0$.

Оскільки напрям векторного добутку визначається напрямом обертання від *першого* співмножника до *другого*, то результат векторного добутку залежить від порядку співмножників. Переставлення співмножників призводить до зміни напряму векторного добутку на протилежний: $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$; $-\vec{c} = [\vec{b}, \vec{a}]$.

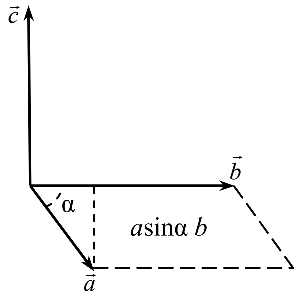

Рис. 0.3

Векторний добуток підкоряється дистрибутивному правилу:

$$[\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c})] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}].$$

Подамо в прямокутній декартовій системі координат векторний добуток через координати:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [(a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z), (b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z)].$$

Урахувавши дистрибутивність векторного добутку, а також властивості векторного добутку *ортів*

$$[\vec{e}_x,\ \vec{e}_x] = [\vec{e}_y, \vec{e}_y] = [\vec{e}_z,\ \vec{e}_z] = 0,$$

$$[\vec{e}_x, \vec{e}_y] = \vec{e}_z = -[\vec{e}_y, \vec{e}_x],$$

$$[\vec{e}_y, \vec{e}_z] = \vec{e}_x = -[\vec{e}_z, \vec{e}_y],$$

$$[\vec{e}_z,\ \vec{e}_x] = \vec{e}_y = -[\vec{e}_x,\ \vec{e}_z],$$

дістанемо

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{e}_x(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{e}_y(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{e}_z(a_x b_y - a_y b_x)$$

або через визначник

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Мішаним (або скалярно-векторним) добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (узятих у певному порядку) називають вираз $\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]$, тобто скалярний добуток вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, можна обчислити за формулою:

$$\vec{a}\left[\vec{b}, \vec{c}\right] = a(b \cdot c \sin\alpha)\cos\beta,$$

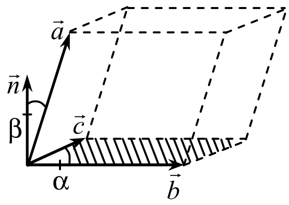

Рис. 0.4

де α — кут між векторами $\vec{b}$ і $\vec{c}$; β — кут між векторами $\vec{a}$ і $\left[\vec{b}, \vec{c}\right]$.

З рис. 0.4 видно, що $\left|\left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right| = bc\sin\alpha$ чисельно дорівнює площі основи паралелепіпеда, а вираз $h = a\cos\beta$ — висота паралелепіпеда. Напрям векторного добутку $\left[\vec{b}, \vec{c}\right]$ зображено *ортом* $\vec{n}$, тому кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{n}$ — кут β. У разі, якщо кут β гострий (рис. 0.4), висоту паралелепіпеда слід брати зі знаком «плюс», якщо тупий — зі знаком «мінус».

Вираз $\vec{a}\left[\vec{b}, \vec{c}\right]$ має простий геометричний зміст. Мішаний добуток є скаляром, величина якого дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Об'єм паралелепіпеда не повинен залежати від того, яка з його бокових граней узята за основу. Звідси випливає, що $\vec{a}\left[\vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{b}\left[\vec{c}, \vec{a}\right] = \vec{c}\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, тобто для мішаного добутку можна виконувати циклічне переставлення співмножників:

$$\begin{array}{ccc} & \vec{a} & \\ \nearrow & & \searrow \\ \vec{c} & \longleftarrow & \vec{b}. \end{array}$$

Оскільки мішаний добуток — скаляр, тобто скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\left[\vec{b}, \vec{c}\right]$, то $\vec{a}\left[\vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\vec{a}$, але переставлення будь-яких інших двох співмножників призводить до порушення циклічного переставлення, тому знак змінюється на протилежний:

$$\vec{a}\left[\vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{b}\left[\vec{c}, \vec{a}\right] = \vec{c}\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\vec{b}\left[\vec{a}, \vec{c}\right] = -\vec{c}\left[\vec{b}, \vec{a}\right] = -\vec{a}\left[\vec{c}, \vec{b}\right]$$

(вирази зі знаком мінус відповідають антициклічному переставленню співмножників).

Перемноживши скалярно вектори $\vec{c} = c_x\vec{e}_x + c_y\vec{e}_y + c_z\vec{e}_z$ і $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{e}_x(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{e}_y(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{e}_z(a_x b_y - a_y b_x)$ та врахувавши, що скалярний добуток однойменних ортів дорівнює одиниці, а ортогональних — нулю, дістанемо:

$$V = \vec{c}\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = c_x(a_y b_z - a_z b_y) + c_y(a_z b_x - a_x b_z) + c_z(a_x b_y - a_y b_x)$$

або
$$V = \vec{c}\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Подвійний векторний добуток векторів $\vec{d} = \left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right]$ — вектор, перпендикулярний до обох співмножників, тобто вектор $\vec{d}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$ і вектора $\left[\vec{b}, \vec{c}\right]$. Оскільки вектор $\left[\vec{b}, \vec{c}\right]$ перпендикулярний до площини, утвореної векторами $\vec{b}$ і $\vec{c}$, то вектор $\vec{d}$ має лежати в площині векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (вважається, що всі вектори виходять з однієї точки — початку координат).

У векторному аналізі доводиться, що подвійний векторний добуток є різницею двох доданків:

$$\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}).$$

Вираз читається як «бац мінус цаб».

0.2. Елементарні функції

До елементарних відносять раціональну, степеневу, показникову, логарифмічну та тригонометричну функції.

Ціла раціональна функція — функція, що подається цілим відносно x багаточленом

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

де a_0, a_1, a_{n-1}, n — сталі величини. Наприклад, $y = a$ (стала), $y = ax + b$ (лінійна функція), $y = ax^2 + bx + c$ (квадратична функція).

Вираз $ax^2 + bx + c = 0$ — квадратне рівняння, корені якого визначаються за формулою:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Степенева функція — функція, що має вигляд

$$y = ax^{\mu},$$

де μ — будь-яке стале дійсне число. При цілому μ дістаємо раціональну функцію. При дробовому μ маємо радикал. Наприклад, якщо $a = 1$ і $\mu = 1/m$, де m — натуральне число, то $y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$.

Показникова функція — функція, що має вигляд $y = a^x$, де a — число, відмінне від одиниці; x — будь-яке дійсне значення. Графік функції — показникова крива. При $a > 1$ вона монотонно зростає від 0 до ∞ (рис. 0.5); при $a < 1$ монотонно спадає від ∞ до 0 (рис. 0.6). Крива проходить через точку (0; 1) і наближається асимптотично до осі x (при $a > 0$ — ліворуч, при $a < 0$ — праворуч) тим швидше, чим більше $|a|$.

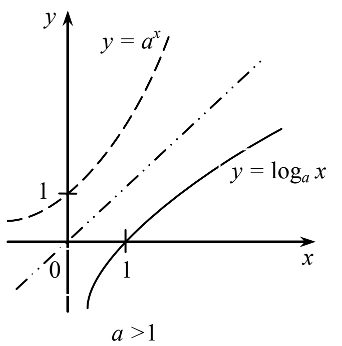

Рис. 0.5

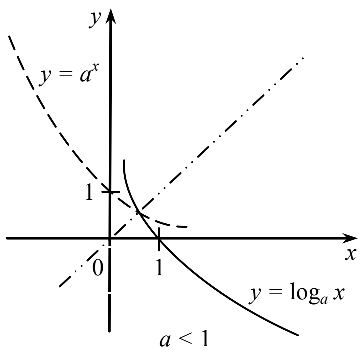

Рис. 0.6

Логарифмічна функція має вигляд $y = \log_a x$ ($a > 0$).

Графік логарифмічної кривої — дзеркальне відображення показникової кривої відносно бісектриси $y = x$ (рис. 0.5, 0.6). При $a = e$ маємо натуральний логарифм: $y = \ln x$. Функція існує тільки при $x > 0$. При $a > 1$ монотонно зростає від $-\infty$ до $+\infty$, при $a < 1$ монотонно спадає від $+\infty$ до $-\infty$ тим повільніше, чим більше $|\ln a|$ (це випливає з виразу $y=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$). Крива проходить через точку (1, 0) і наближається асимптотично до осі y (при $a>1$ знизу, а при $a<1$ зверху) тим швидше, чим більше $|\ln a|$.

Функція $y=e^{-(ax)^2}$.

Ця функція зростає від 0 до 1 і спадає від 1 до 0; крива симетрична відносно осі y і асимптотично наближається до осі x тим швидше, чим більше a. Максимум у точці (0; 1). Важливий частинний випадок цієї кривої — крива нормального закону розподілу випадкових величин (крива Гауса).

Тригонометричні функції:

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$.

Незалежна змінна x визначається радіанною мірою (якщо не обумовлене протилежне).

0.3. Формули тригонометричних перетворень

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}};\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha + \varphi),$$

де $\varphi = \mathrm{arctg}\,(b\,/a)$.

Деякі наближені формули. Якщо $x << 1$, то

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx; \quad e^x \approx 1 + x; \quad \ln(1 + x) \approx x.$$

Для малих кутів: $\sin x \approx x$; $\cos x \approx 1 - x^2/2$; $\mathrm{tg}x \approx x$.

Теорема синусів і теорема косинусів: Нехай a, b, c — сторони трикутника ABC; α, β, γ — кути цього трикутника, що лежать відповідно проти сторін a, b, c; R — радіус кола, описаного навколо трикутника; тоді діють такі залежності:

теорема синусів: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$;

теорема косинусів:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

0.4. Диференціальне числення

Похідна. Нехай $y = f(x)$ — неперервна дійсна функція дійсної змінної x, задана в околі точки x. Перша похідна (похідна першого порядку) функції $f(x)$ за x у точці x — це межа

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = y'(x).$$

У кожній точці x, де існує межа, похідна є мірою зміни y відносно x. Геометричний зміст похідної — кутовий коефіцієнт k, тобто тангенс кута нахилу $k = y' = \mathrm{tg}\alpha$, де α — кут, який утворює дотична (рівняння дотичної $y = kx$) до кривої $y = f(x)$ в даній точці з додатним напрямом осі абсцис. У табл. 0.1 наведені похідні основних функцій.

Частинна похідна. Нехай $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — неперервна дійсна функція змінних $x_1, x_2, ..., x_n$. Частинну похідну (першого порядку) функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за x_1 можна знайти диференціюванням функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за x_1, якщо решту $n - 1$ незалежних змінних вважати сталими параметрами. Наприклад, $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 y}{z}$, тоді

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy}{z};\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2}{z};\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{x^2y}{z^2}.$$

Диференціал незалежної змінної (її *приріст*) позначають як dx. Диференціал функції $y = f(x)$ однієї змінної — добуток $f'(x)$ на dx: $dy=f'(x)dx$. Повний диференціал функції кількох змінних $u=f(x, y, z,...)$ — сума всіх її частинних диференціалів за всіма змінними:

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\dots.$$

Таблиця 0.1

Похідні основних функцій

Функція	Похідна	Функція	Похідна
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$e^{n\cdot x}$	$n\cdot e^{n\cdot x}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x\cdot\ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^x	$x^x\left(1+\ln x\right)$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\lg x$	$\frac{1}{x}\cdot\lg e$	$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{cosec} x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
e^x	e^x		

Правила диференціювання:

1. Похідна сталої дорівнює нулю.
2. $(cP)' = c\,P'$, де c = const.
3. Похідна суми функцій дорівнює сумі похідних.
4. Похідна добутку функцій: $(uv)' = u'v + v'u$;

$$(P_1 P_2 \ldots P_n)' = P_1' P_2 \ldots P_n + P_1 P_2' \ldots P_n + P_1 P_2 \ldots P_n'.$$

5. Похідна відношення функцій: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Градієнт скалярної функції $\varphi(x, y, z)$ описує зміну цієї функції у просторі відносно координатних осей:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — координатні орти осей x, y, z.

0.5. Інтегральне числення

Невизначеним інтегралом або *первісною функцією* даної функції $y = f(x)$ називають функцію $F(x)$, похідна від якої дорівнює $f(x)$ або диференціал якої дорівнює $f(x)dx$. Вираз $F(x) + C$ для всіх первісних функцій від даної функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$:

$$F(x) + C = \int f(x)dx,$$

де C — будь-яка довільна стала величина.

Первісних для даної функції $y = f(x)$ — нескінченна кількість; різниця між двома первісними — величина стала. Графіки всіх первісних для даної функції — це одна й таж крива, здобута паралельним перенесенням кривої відносно осі координат. Незалежно вибираючи сталу C, дістаємо різні первісні.

Інтегрування — операція з відшукання інтеграла від заданої підінтегральної функції. *Основні інтеграли* — формули інтегрування, які дістають оберненням основних формул диференціювання.

Основні правила інтегрування невизначених інтегралів дають змогу перетворити інтеграл від даної функції на інтеграли інших функцій.

1. За означенням невизначеного інтеграла похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x),$$

або знак диференціала перед знаком інтеграла ліквідує останній

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

2. Знак інтеграла перед знаком диференціала ліквідує останній, але з'являється довільна стала:

$$\int d[f(x)] = f(x) + C.$$

3. Сталий множник можна винести за знак інтеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

4. Інтеграл суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) інтегралів від окремих членів: $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx.$

5. Правило підставлення: якщо $x = \varphi(t)$, то

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

6. Інтегрування частинами:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

У табл. 0.2 наведені основні інтеграли (сталі інтегрування опущені).

Таблиця 0.2

Таблиця основних інтегралів

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\,x$
$\int e^x dx = e^x$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \mathrm{tg}\,x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \mathrm{ctg}\,x dx = \ln\lvert\sin x\rvert$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right\rvert$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|$

Визначеним інтегралом неперервної функції $y = f(x)$ у межах від a до b називають число, яке дорівнює межі інтегральних сум:

$$S = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \Delta x_i,$$

де f_i — значення функції всередині інтервалу Δx_i, на які розбито інтервал від a до b.

Геометричним змістом визначеного інтеграла є площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $f(x)$, двома прямими $x = a$, $x = b$ та віссю OX:

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

де a, b — нижня та верхня межі інтегрування; $f(x)dx$ — підінтегральний вираз; x — змінна інтегрування.

Значення інтеграла залежить від виду підінтегральної функції та від меж інтегрування a і b.

Обчислення визначених інтегралів виконується за допомогою формули Ньютона — Лейбніца:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ — первісна функція, тобто для обчислення *визначеного* інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ достатньо знайти *невизначений* інтеграл $\int f(x)dx = F(x)$, підставити в $F(x)$ замість x спочатку верхню межу, потім нижню й відняти від першої величини другу.

Властивості визначеного інтеграла:

1) $\int_a^b dx = b - a$;

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

4) $\int_a^b [A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)]dx = A_1 \int_a^b f_1(x)dx + A_2 \int_a^b f_2(x)dx$.

Подвійним інтегралом функції двох змінних називають інтегральний вираз $\iint_S f(x,y)dS$ (або $\int_S f(x,y)dS$). У загальному випадку геометричний зміст подвійного добутку — об'єм вертикального циліндричного тіла, обмеженого зверху функцією $f(x, y)$, а знизу площею S на координатній площині XOY.

Подвійний інтеграл вигляду $\iint_S dS$ ($\int_S dS$ або в ортогональній системі координат $\iint dxdy$) визначає площу *плоскої* фігури.

У фізиці за допомогою подвійного інтеграла розраховують момент інерції і координати центра тяжіння плоского тіла (пластини).

Потрійним інтегралом функції трьох змінних називають інтегральний вираз $\iiint_V f(x, y, z)dV$ (або $\int_V f(x, y, z)dV$). Наприклад, якщо $f(x, y, z)$ — густина тіла в точці, то потрійний інтеграл визначає масу тіла. Крім цього, за допомогою потрійного інтеграла розраховують момент інерції і координати центра тяжіння об'ємного тіла.

Потрійний інтеграл вигляду $\iiint_V dV$ (або $\int_V dV$, або в ортогональній системі координат $\iiint dxdydz$) визначає об'єм тіла.

Навчальний елемент 1

КІНЕМАТИКА

1.1. Механічний рух. Система відліку

Кінематика — розділ механіки, який вивчає рух тіл, незалежно від причин, що викликали цей рух. Сам термін походить від грецького слова «кінета», що означає рух.

Механічним рухом називають зміну положення тіла в просторі відносно інших тіл. З цього означення випливає, що механічний рух є відносним. Будь-яке тіло може бути нерухомим відносно одних тіл і рухатись відносно інших. Разом з тим рух є абсолютним, оскільки завжди можна вказати таке тіло, відносно якого дане «нерухоме» тіло рухається, тобто абсолютно нерухомих тіл у природі не існує. Отже, починаючи досліджувати рух будь-якого тіла, необхідно визначити, відносно якого іншого тіла він буде розглядатись. Тіло, відносно якого розглядають рух, називають *тілом відліку*. Для математичного опису руху з тілом відліку необхідно пов’язати систему координат. Як відомо, існує декілька різних систем координат (наприклад, полярна, циліндрична, сферична), але найпоширенішою є *прямокутна декартова система координат*.

Слід звернути увагу, що існують два види декартових систем: *права* та *ліва*, які розрізняють за допомогою *правила гвинта*. Якщо обертати ручку гвинта від додатного кінця осі OX (вісь абсцис) до додатного кінця осі OY (вісь ординат), то у правій системі координат гвинт буде поступально рухатись у додатному напрямі осі OZ (вісь аплікат), а в лівій системі — у від’ємному напрямі осі OZ. У фізиці здебільшого застосовується права система (рис. 1.1).

Переміщення тіл відбувається з плином часу, тому для опису руху необхідно мати годинник. Тіло відліку, а також пов’язана з ним система координат і годинник становлять *систему відліку*.

Важливо зазначити, що у класичній механіці загальновизнаною є концепція простору і часу, розроблена Ньютоном. Відповідно до цієї концепції простір і час розглядаються як не пов’язані ні між собою, ні з рухом тіл. Іншими словами, у класичній механіці простір і час вважаються абсолютними і незалежними один від одного. Тому хід годинників (тобто плин часу) не залежить від системи відліку й усюди є однаковим.